УДК 512

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММЫ «MAXIMA» В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

Секаева Л.Р., к.ф.-м.н., доцент,
Казанский федеральный университет, г. Казань
LRSekaeva@kpfu.ru

Аннотация. Использование Maxima на занятиях способствует повышению уровня знаний у студентов о возможностях применения компьютера в математике и развитию навыков работы с пакетами программ. Одной из ролей компьютера является проведение большого количества вычислений, нахождение оптимального решения и его наглядного представления.

Ключевые слова: математика, «MAXIMA»

APPLICATION OF THE “MAXIMA” PROGRAM IN EDUCATIONAL PROCESS

Sekaeva L.R.,
KFU, Kazan
LRSekaeva@kpfu.ru

Abstract. Use of Maxima on occupations promotes increase in level of knowledge at students of opportunities of use of the computer in mathematics and to development of skills of work with software packages. One of roles of the computer is carrying out a large number of calculations, finding of an optimal solution and its evident representation.

Keywords: mathematics, "MAXIMA".

Пример. Разложить функцию $f(x) = (x-1)^2$ в ряд Фурье на отрезке [-π,π].

```
(%i1) load(fourie);
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.1/share/maxima/5.25.1/share/calculus/fourie.mac
(%i2) fourier((x-1)^2,x,%pi);
```

(%t2) $$a_0 = \frac{\frac{2\pi^3}{3} + 2\pi}{2\pi}$$

(%t3) $$a_n = \frac{\frac{2\pi^2 \sin(\pi n)}{n} + \frac{2\sin(\pi n)}{n} - \frac{4\sin(\pi n)}{n^3} + \frac{4\pi\cos(\pi}{n^2}}{\pi}$$

(%t4) $$b_n = \frac{\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n} - \frac{4\sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$

(%o4) [%t2, %t3, %t4]

Для того, чтобы не только вычислить коэффициенты ряда Фурье, но и получить разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-T,T]$ и T-периодически продолженной на всю вещественную ось в ряд Фурье, следует

ввести **load(fourie); totalfourier (*f(x)*,*x*,*T*).**

```
(%i5) totalfourier((x-1)^2,x,%pi);
```

$$(\%t5)\quad a_0=\frac{\frac{2\pi^3}{3}+2\pi}{2\pi}$$

$$(\%t6)\quad a_n=\frac{\frac{2\pi^2\sin(\pi n)}{n}+\frac{2\sin(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^3}+\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$

$$(\%t7)\quad b_n=\frac{\frac{4\pi\cos(\pi n)}{n}-\frac{4\sin(\pi n)}{n^2}}{\pi}$$

$$(\%t8)\quad a_0=\frac{\pi^2+3}{3}$$

$$(\%t9)\quad a_n=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$(\%t10)\quad b_n=\frac{4(-1)^n}{n}$$

$$(\%o10)\quad 4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n}\right)+4\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}\right)+\frac{\pi^2+3}{3}$$

Maxima не только вычислила коэффициенты разложения, но и упростила их, а так же записала общий вид разложения.

Для примера рассмотрим разложение функции $f(x)=x\cdot e^x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi,\pi]$ и ряд Тейлора в окрестности точки ноль. Построим графики, полученных разложений и сравним их с графиком $f(x)=x\cdot e^x$.

(%i2) totalfourier(x*%e^x,x,%pi);

(%t2) $a_0 = \frac{-\%e^{\pi}+\pi\,\%e^{-\pi}+\%e^{-\pi}+\%e^{\pi}\,\pi}{2\,\pi}$

(%t3) $a_n = \Big(-\frac{\pi\,n^3\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\,n\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{2\,n\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^3\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}$
$\frac{\%e^{\pi}\pi\,n\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{2\,\%e^{\pi}n\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\pi\,n^2\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{n^2\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\pi\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-$
$\frac{\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^2\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}n^2\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\pi\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}\Big)/\pi$

(%t4) $b_n = \Big(-\frac{\pi\,n^2\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{n^2\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-$
$\frac{\sin(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}+\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^2\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}n^2\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}+\frac{\%e^{\pi}\pi\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\sin(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-$
$\frac{\pi\,n^3\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\pi\,n\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{2\,n\cos(\pi\,n)}{\%e^{\pi}n^4+2\,\%e^{\pi}n^2+\%e^{\pi}}-\frac{\%e^{\pi}\pi\,n^3\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}-\frac{\%e^{\pi}\pi\,n\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}$
$\frac{2\,\%e^{\pi}n\cos(\pi\,n)}{n^4+2\,n^2+1}\Big)/\pi$

(%t5) $a_0 = \frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)}{2\,\pi}$

(%t6) $a_n = \frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\,\pi}n^2+\%e^{2\,\pi}n^2+\pi\,n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)(-1)^n}{\pi\,(n^2+1)^2}$

(%t7) $b_n = -\frac{\%e^{-\pi}n(\pi\,\%e^{2\,\pi}n^2+\pi\,n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-2\,\%e^{2\,\pi}+\pi+2)(-1)^n}{\pi\,(n^2+1)^2}$

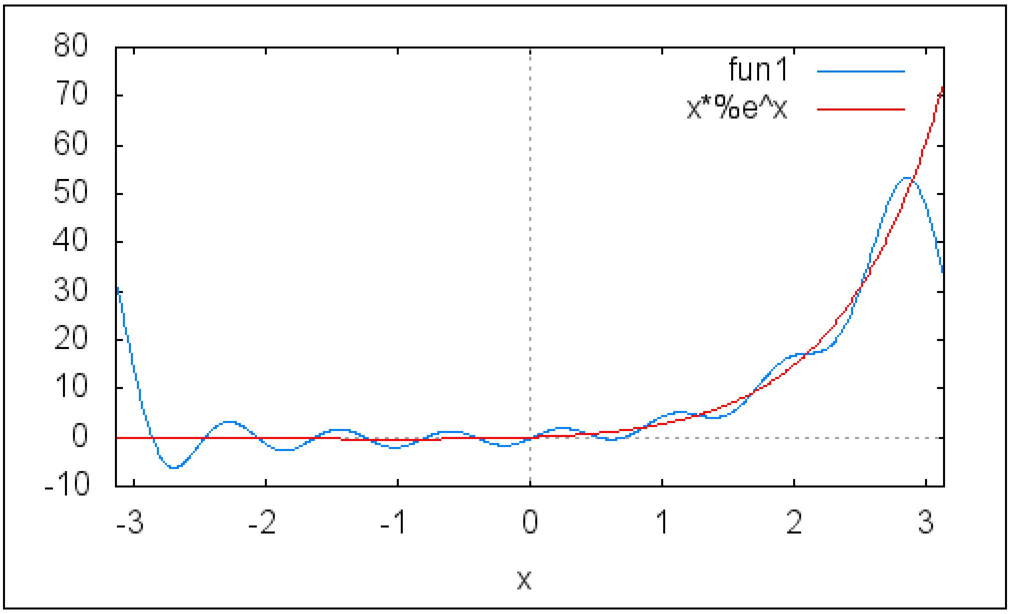
(%o7) $-\frac{\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(\pi\,\%e^{2\,\pi}n^2+\pi\,n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-2\,\%e^{2\,\pi}+\pi+2)(-1)^n\sin(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+$
$\frac{\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi\,\%e^{2\,\pi}n^2+\%e^{2\,\pi}n^2+\pi\,n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)(-1)^n\cos(n\,x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}(\pi\,\%e^{2\,\pi}-\%e^{2\,\pi}+\pi+1)}{2\,\pi}$

```
(%i9) g(x):= -(%e^(-%pi)*sum((n*(%pi*%e^(2*%pi)*n^2+%pi*n^2+%pi*%e^(2*%pi)
      -2*%e^(2*%pi)+%pi+2)*(-1)^n*sin(n*x))/(n^2+1)^2,n,1,7))/%pi+
      (%e^(-%pi)*sum(((%pi*%e^(2*%pi)*n^2+%e^(2*%pi)*n^2+%pi*n^2-n^2+
      %pi*%e^(2*%pi)-%e^(2*%pi)+%pi+1)*(-1)^n*cos(n*x))/(n^2+1)^2,n,1,7))/
      %pi+(%e^(-%pi)*(%pi*%e^(2*%pi)-%e^(2*%pi)+%pi+1))/(2*%pi);
```

(%o9) $$g(x):=\frac{-\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{7}\frac{n\left(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\pi n^2+\pi\,\%e^{2\pi}+(-2)\,\%e^{2\pi}+\pi+2\right)(-1)^n\sin(n x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}\sum_{n=1}^{7}\frac{\left(\pi\,\%e^{2\pi}n^2+\%e^{2\pi}n^2+\pi n^2-n^2+\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1\right)(-1)^n\cos(n x)}{(n^2+1)^2}}{\pi}+\frac{\%e^{-\pi}\left(\pi\,\%e^{2\pi}-\%e^{2\pi}+\pi+1\right)}{2\pi}$$

```
(%i11) wxplot2d([g(x),x*%e^x],[x,-%pi,%pi]);
```

(%t11)



(%o11)

Здесь **(%i2)** находит разложение функции в ряд Фурье, **(%i9)** присваивает функции $g(x)$ значение частной суммы при n=7, **(%i11)** рисует графики функций $g(x)$ и $x\cdot e^x$.

Для ряда Тейлора последовательность операций аналогична.

```
(%i12) niceindices(powerseries(x*%e^x,x,0));
```

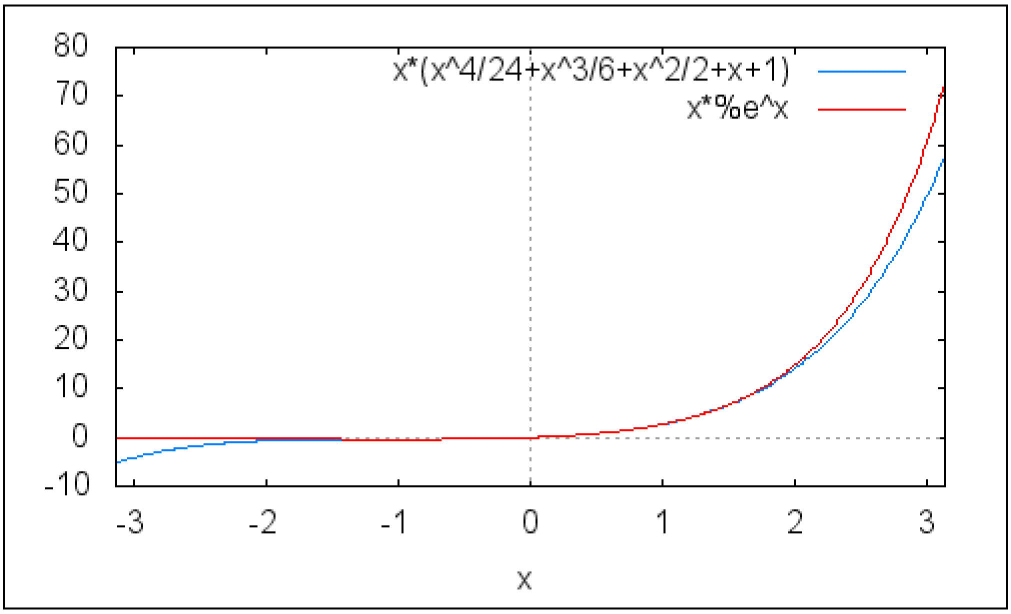
(%o12) $$x\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$$

(%i13) `t(x):=x*sum(x^i/i!,i,0,4);`

(%o13) $t(x):=x\sum_{i=0}^{4}\frac{x^i}{i!}$

(%i14) `wxplot2d([t(x),x*%e^x],[x,-%pi,%pi]);`

(%t14)



(%o14)

Рассмотрим различные способы решения систем.

Метод Крамера

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x+2y+10z=-15, \\ 2x+4y-z=12, \\ x+y-3z=9. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим основной определитель системы:

(%i1) `D:matrix([1,2,10],[2,4,-1],[1,1,-3]);`
`D:determinant(D);`

(%o1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(%o2) -21

Командой (%i1) записываются коэффициенты при неизвестных x, y, z и вычисляется этот определитель, в строке (%o1) записан определитель $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ и получен ответ в строке (%o2) $D=-21$.

Так как $D = -21 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Чтобы получить его, необходимо вычислить дополнительные определители D_x, D_y, D_z и используя формулы Крамера $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$, $z = \frac{D_z}{D}$ найти неизвестные x, y, z.

Вычислим дополнительные определители.

```
(%i3) Dx:matrix([-15,2,10],[12,4,-1],[9,1,-3]);
      Dx:determinant(Dx);
      x=Dx/D;
```

$$(\%o3) \begin{bmatrix} -15 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & -1 \\ 9 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(\%o4)\ -21$$

$$(\%o5)\ x=1$$

Командой (%i3) задается определитель D_x, составленный следующим образом:

- первая строка записывается на основе коэффициентов первого уравнения системы, взятых в следующем порядке: свободный член, коэффициент при неизвестном y, коэффициент при неизвестном z,

- вторая и третья строки записываются аналогично из коэффициентов второго и третьего уравнений соответственно.

В строке (%o4) вычисляется определитель $D_x = -21$, в строке (%o5) находим неизвестную $x = 1$.

```
(%i6) Dy:matrix([1,-15,10],[2,12,-1],[1,9,-3]);
      Dy:determinant(Dy);
      y=Dy/D;
```

$$(\%o6) \begin{bmatrix} 1 & -15 & 10 \\ 2 & 12 & -1 \\ 1 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(\%o7)\ -42$$

$$(\%o8)\ y=2$$

Командой (%i6) записывается определитель D_y, составленный следующим образом:

- первая строка (из первого уравнения) – коэффициент при неизвестном x, свободный член, коэффициент при неизвестном z,

- вторая и третья строки записываются аналогично (из второго и третьего уравнения).

В строке (%o7) вычисляется дополнительный определитель $D_y = -42$, в строке (%o8) находим неизвестную $y = 2$.

```
(%i9) Dz:matrix([1,2,-15],[2,4,12],[1,1,9]);
      Dz:determinant(Dz);
      z=Dz/D;
```

$$(\%o9)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -15 \\ 2 & 4 & 12 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

(%o10) 42

(%o11) $z=-2$

Командой (%i9) записывается определитель D_z, составленный следующим образом:

- первая строка (из первого уравнения) – коэффициент при неизвестном x, коэффициент при неизвестном y, свободный член,

- вторая и третья строки записываются аналогично.

В строке (%i10) вычисляется дополнительный определитель $D_y = 42$, в строке (%i11) находим неизвестную $z=-2$.

Ответ: $(1;2;-2)$.

Чтобы не набирать команды вручную можно используя меню провести действия, описанные выше «щелкнуть по кнопкам «Алгебра → Enter Matrix…». При этом появится окно, которое необходимо заполнить, щелкнуть по команде «ОК»…»

Решение системы линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=21, \\ 4x-2y+3z=42, \\ 3x+4y-2z=21. \end{cases}$$

Решение.

```
(%i12) A:matrix([2,-3,4],[4,-2,3],[3,4,-2]);
```

$$(\%o12)\quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Командой (%i12) записывается матрица А – матрица, составленная из коэффициентов при незвестных x, y, z.

```
(%i13) B:matrix([21],[42],[21]);
```

$$(\%o13)\quad \begin{bmatrix} 21 \\ 42 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Командой (%i13) записывается матрица B – матрица, составленная из свободных членов.

```
(%i14) A^^(-1);
```

$$(\%o14)\quad \begin{bmatrix} -\frac{8}{21} & \frac{10}{21} & -\frac{1}{21} \\ \frac{17}{21} & -\frac{16}{21} & \frac{10}{21} \\ \frac{22}{21} & -\frac{17}{21} & \frac{8}{21} \end{bmatrix}$$

Командой (%i14) записывается матрица, обратная данной матрице A.

```
(%i15) A^^(-1).B;
```

$$(\%o15)\quad \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Командой (%i15) обратная матрица умножается на матрицу B.

Ответ: $(11;-5;-4)$.

Метод Гаусса

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x+2y-8z=14, \\ 2x+4y-7z=13, \\ 5x+3y+4z=-2. \end{cases}$$

Решение.

Введем расширенную матрицу A

```
(%i16) A:matrix([1,2,-8,14],[2,4,-7,13],[5,3,4,-2]);
```

$$(\%o16)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 14 \\ 2 & 4 & -7 & 13 \\ 5 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

и приведем ее к треугольному виду

```
(%i17) echelon(A);
```

$$(\%o17)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 14 \\ 0 & 1 & -\frac{44}{7} & \frac{72}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

решим, получим искомые значения

```
(%i18) solve([x+2*y-8*z=14, y-(44/7)*z=72/7, z=-5/3], [x,y,z]);
```

$$(\%o18)\quad [[x=\frac{22}{21}, y=-\frac{4}{21}, z=-\frac{5}{3}]]$$

Ответ: $\left(\frac{22}{21}; -\frac{4}{21}; -\frac{5}{3}\right)$.

Любую из трех выше приведенных систем можно с помощью команды solve

solve([*уравнение*1, *уравнение*2, …],[*переменная*1, *переменная*2, …]).

Пример:

```
(%i19) solve([x+2*y-8*z=14, 2*x+4*y-7*z=13, 5*x+3*y+4*z=-2],
       [x,y,z]);
```

(%o19) $[[x=\frac{22}{21}, y=-\frac{4}{21}, z=-\frac{5}{3}]]$

Ответ: $\left(\frac{22}{21}; -\frac{4}{21}; -\frac{5}{3}\right)$.

Примеры:

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = 3x - x^2 \text{ и } y = x^2 - x.$$

Решение:

Зададим функции и построим их графики

```
 --> ***********площадь криволинейной трапеции***************
(%i1) f(x):=3*x-x^2;
```

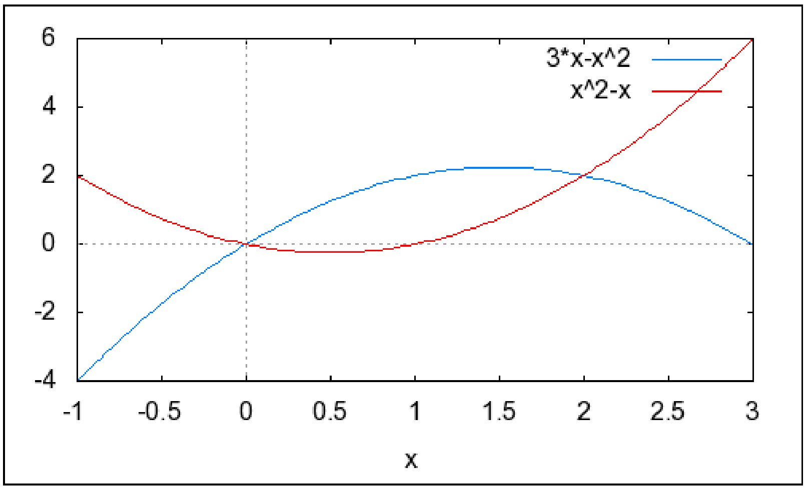
(%o1) $f(x):=3\,x-x^2$

```
(%i2) g(x):=x^2-x;
```

(%o2) $g(x):=x^2-x$

```
(%i3) wxplot2d([f(x),g(x)], [x,-1,3])$
```

(%t3)



Из графика видно, что функции пересекаются в двух точках, и область является простой, т.е. ее не нужно делить на подобласти.

Найдем точки пересечения кривых, для этого решим уравнение:

```
(%i4) solve(f(x)=g(x),x);
```

(%o4) $[x=0, x=2]$

Теперь составим и вычислим определенный интеграл, результат которого и есть площадь данной фигуры:

```
(%i5) integrate(f(x)-g(x), x, 0, 2);
```

(%o5) $\frac{8}{3}$

Ответ: Площадь искомой фигуры равна 8/3.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной следующими линиями

$$y = \frac{4}{x}, \text{y} = 0,\ y = 4,\ x = 0,\ x = 4.$$

Решение:

Зададим функции $y = \frac{4}{x}$, $\text{y} = 0$, $y = 4$,

```
(%i1) f1(x):=4/x; f2(x):=0; f3(x):=4;
```

(%o1) $\text{f1}(x) := \frac{4}{x}$

(%o2) $\text{f2}(x) := 0$

(%o3) $\text{f3}(x) := 4$

Вертикальные прямые $x = 4$ и $x = 0$ в Maxima можно построить только, представив их уравнения в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 4, \\ y = t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 0, \\ y = t. \end{cases}$

```
(%i4) r1(t):=4;  r2(t):=t;
```

(%o4) $\text{r1}(t) := 4$

(%o5) $\text{r2}(t) := t$

```
(%i6) h1(t):=0;  h2(t):=t;
```

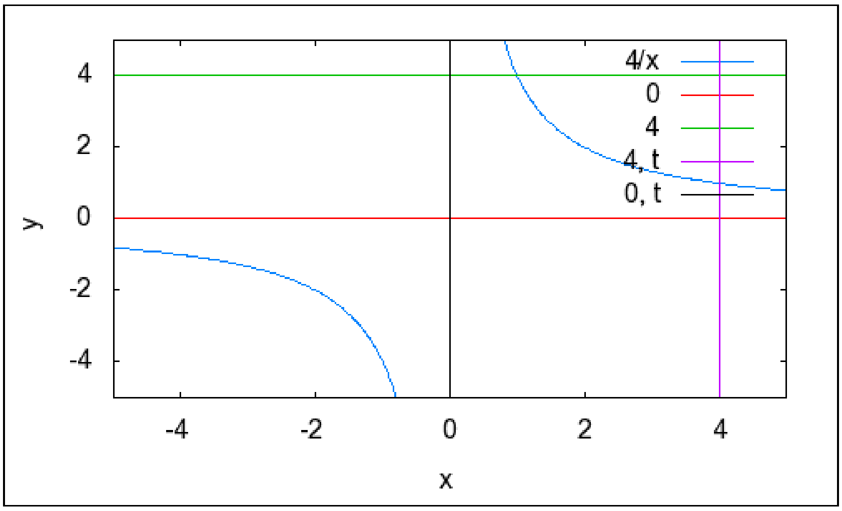
(%o6) $\text{h1}(t) := 0$

(%o7) $\text{h2}(t) := t$

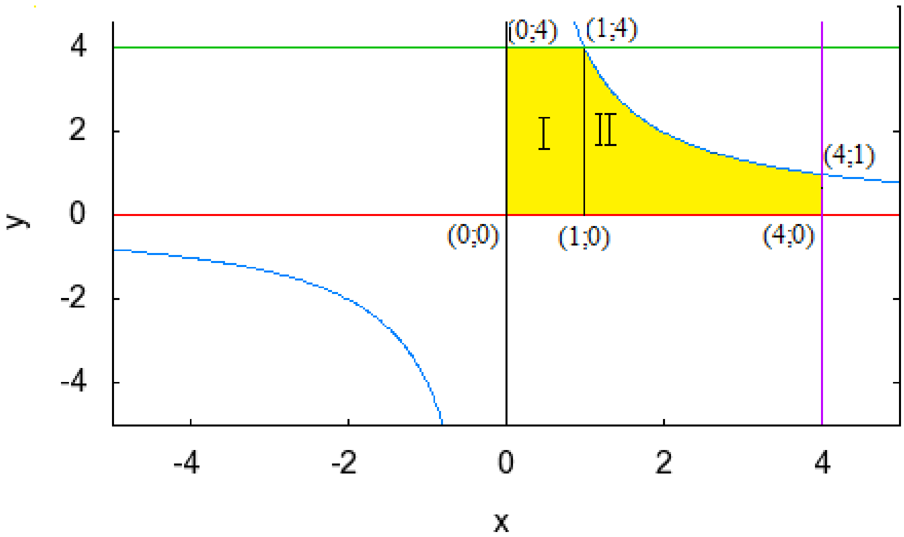
Теперь построим графики всех этих функций:

```
(%i8) wxplot2d([f1(x),f2(x),f3(x),
      ['parametric, r1(t), r2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]],
      ['parametric, h1(t), h2(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]],
       [x,-5,5],[y,-5,5])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
  plot2d: some values were clipped.
```

(%t8)



Чтобы вычислить площадь интересующей нас фигуры, необходимо поделить область на две части:



Первая фигура является прямоугольником, ее площадь равна $S_1 = 4 \cdot 1 = 4$.
Площадь второй фигуры вычисляем с помощью определенного интеграла:

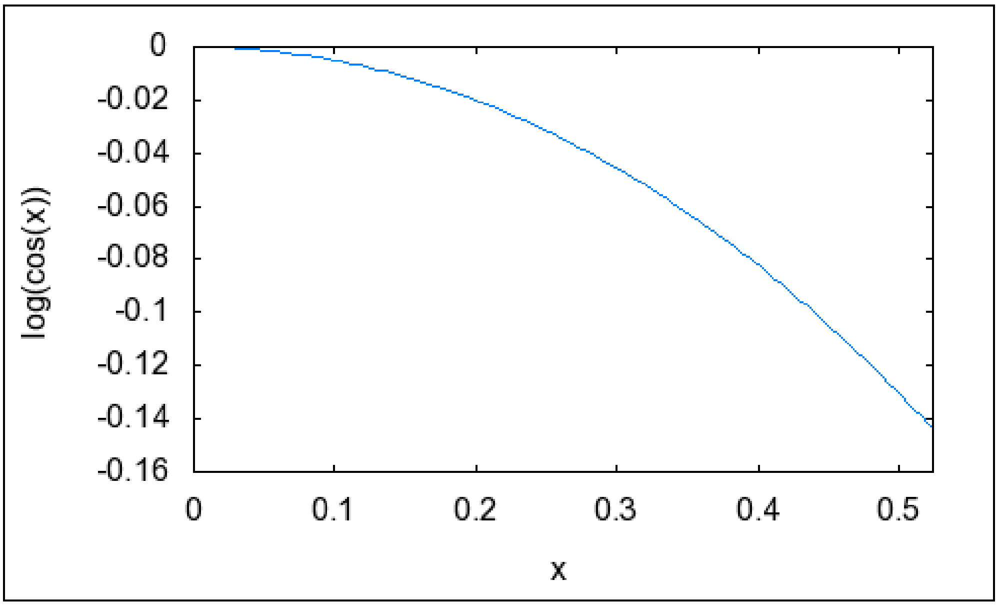
```
(%i9) integrate(f1(x), x, 1, 4);
(%o9) 4 log(4)
```

Ответ: Площадь искомой фигуры равна (4+4 $ln4$).

3. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\cos x)$, отсеченной прямыми $x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{6}$.

Решение:
Зададим функцию и построим ее график

```
 --> ******длина дуги******
(%i1) f(x):=log(cos(x));
(%o1) f(x):=log(cos(x))
(%i2) wxplot2d([f(x)], [x,0,%pi/6])$
```

(%t2)


Вычислим первую производную от данной функции:

```
(%i2) h(x):=diff(f(x),x,1);
      h(x);
(%o2) h(x):=diff(f(x),x,1)
```

$$(\%o3)\ -\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Теперь вычислим определенный интеграл:

```
(%i4) q(x):=sqrt(1+h(x)^2);
      integrate(q(x), x, 0, %pi/6);
```

$$(\%o4)\ q(x):=\sqrt{1+h(x)^2}$$

```
Is  cos(x)  positive or negative?
```

При вычислении интеграла на мониторе появляется вопрос о знаке функции *cos x*. Интегрирование мы проводим на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, а здесь *cos x>0*, значит, набираем positive:

```
Is  cos(x)  positive or negative?positive;
```

$$(\%o5)\ \operatorname{asinh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ответ: длина дуги кривой $y=\ln(\cos x)$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$ равна $arsh\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Литература

1. Секаева Л.Р. Применение программы «MAXIMA» для решения задач / Л.Р. Секаева // Тезисы XXIII Международной конференции «Математика. Образование. Информатизация». – Казань, 2015. – С. 78.
2. Малакаев М.С., Секаева Л.Р. Несколько примеров использования программы «MAXIMA» в работе учителя / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева // Ежегодный сборник «Математика в образовании», посвященный памяти Анатолия Вольфовича Мерлина. – 2015. – № 11. – С. 63-66.
3. Малакаев М.С., Секаева Л.Р. / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева // Несколько примеров применения программы «Maxima» в учебном процессе – MATHEDU 2014: Материалы IV Международной научно-практической конференции, посвященной 210-летию Казанского университета и Дню математика «Математическое образование в школе и вузе: теория и практика». – Казань, 2014.). – С. 266-270.
4. Секаева Л.Р., Тюленева О.Н., Широкова Е.А. Курс лекций по математике для бакалавров-геологов / Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева, Е.А. Широкова. – Казань: Казанский федеральный университет, 2014. – 251 с.
5. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2012. – 57 с.
6. Малакаев М.С., Секаева Л.Р., Тюленева О.Н. Основы работы с системой компьютерной алгебры Maxima / М.С. Малакаев, Л.Р. Секаева, О.Н. Тюленева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – Ч.2. – 61 с.